معادلات تفاضلية /دوال لوغاريتمية مع الحل

تمرين 1: (4 نقط)

1° أوجد حلول المعادلة التفاضلية : $(E)\quad y'=-1,15y+1,15$

2° مدينة تحتوي على 10 000 ساكن . على الساعة 8 صباحا ، سمع 100 شخص من هذه المدينة خبرا من طرف الإذاعة المحلية . ينتشر هذا الخبر على السكان مع مرور الزمن t (بالساعات) . على الساعة 8 صباحا ، نضع $t=0$ ، ونسمي $f(t)$ نسبة السكان الذين سمعوا هذا الخبر عند الزمن t . (لدينا إذن $f(0)=0,01$) .

$f'(t)$ هي سرعة انتشار هذا الخبر و تحقق العلاقة : $f'(t)=1,15f(t)[1-f(t)]$.

a) برهن أن الدالة z المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $z=\frac{1}{f}$ تحقق المعادلة التفاضلية (E) .

b) استنتج عبارة $f(t)$ بدلالة t .

c) ادرس تغيرات الدالة f .

d) على أي ساعة (بالتقريب) تكون نسبة السكان الذين سمعوا الخبر لحقت 99 % (أي $f(t)=0,99$) ؟

تمرين 2: (8 نقط)

لتكن الدالة f المعرفة على ، بـ : $f(x)=\ln(1+e^{-x})$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الوحدة : $4\,cm$) .

1° ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها .

2° تحقق أن C_f يقبل مستقيما مقاربا D معادلته $y=-x$. ادرس وضعية C_f بالنسبة لـ D .

3° عين معادلة المماس T لـ C_f عند النقطة التي فاصلتها 0. أرسم D ، T و C_f.

4° x_0 عدد حقيقي غير معدوم . نسمي M و N نقطتين من C_f فاصلتهما على الترتيب x_0 و $-x_0$.

a) تحقق أن $f(x_0)-f(-x_0)=-x_0$.

b) احسب معامل توجيه المستقيم (MN) . ماذا تستنتج ؟

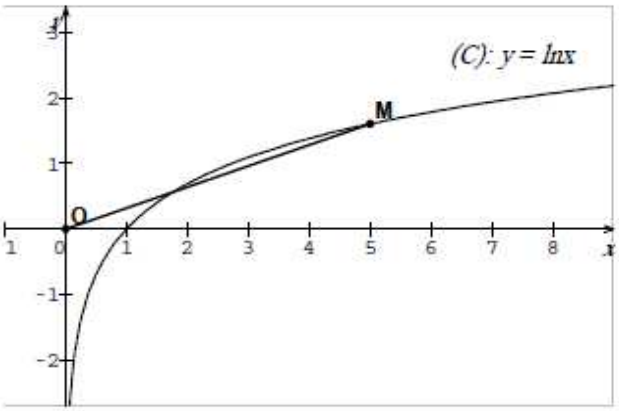
c) بين أن $f'(x_0)+f'(-x_0)=-1$. استنتج أن المماسان لـ C_f عند M و N يتقاطعان على محور التراتيب. أرسم هذين المماسين من أجل $x_0=1$.

تمرين 3 : (8 نقط)

نسمي (C) التمثيل البياني للدالة $x \to \ln x$ في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ،

M نقطة كيفية من (C) فاصلتها x و $d(O;M)$ المسافة بين O و M . نريد

دراسة أصغر قيمة لـ $d(O;M)$.



1° أحسب $d(O;M)$ بدلالة x .

2° بين أن الدالتين :

$f : x \to d(O;M)$

و $g : x \to x^2 + (\ln x)^2$

لهما نفس التغيرات .

3° أحسب $g'(x)$ ثم بين أن

$g'(x)$ له إشارة $x^2 + \ln x$.

4° نسمي h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 + \ln x$. أدرس تغيرات

h .

5° برهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى $]0,6;0,7[$. استنتج

إشارة $h(x)$ ثم تحقق أن g تقبل قيمة حدية صغرى وحيدة .

6° بين أن أصغر قيمة لـ $d(O;M)$ هي $\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$. أوجد حصرا لهذه القيمة .

7° نسمي M_0 نقطة (C) التي فاصلتها α . بين أن (OM_0) يعامد المماس لـ (C)

عند M_0 .

www.youcefmaths.com

الحل:

تمرين 1 :

1° \1 نعلم أن مجموعة حلول المعادلة التفاضلية :

$$y' = ay + b \quad (a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R})$$

هي مجموعة الدوال : $x \to Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ، $C \in \mathbb{R}$.

حلول (E) هي إذن : $y = Ce^{-1,15x} + 1$ ، $C \in \mathbb{R}$.

2° \a) لتكن الدالة z المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $z = \frac{1}{f}$.

$f(t) = \frac{1}{z(t)}$ و منه $f'(t) = -\frac{z'(t)}{z^2(t)}$.

$f'(t) = 1,15 f(t)[1 - f(t)]$ معناه $-\frac{z'(t)}{z^2(t)} = 1.15 \frac{1}{z(t)}\left[1 - \frac{1}{z(t)}\right]$

أي $-z'(t) = 1,15 z(t)\left[1 - \frac{1}{z(t)}\right]$

و بالتالي $z'(t) = -1,15 z(t) + 1,15$

الدالة z هي إذن حل للمعادلة (E).

b) $f(t) = \frac{1}{z(t)}$ و منه $f(t) = \frac{1}{Ce^{-1,15t} + 1}$

بما ان $f(0) = 0,01$ ، فإن $\frac{1}{C+1} = 0,01$ ؛ $C + 1 = 100$

$C = 99$ وبالتالي $f(t) = \frac{1}{99e^{-1,15t} + 1}$.

c) الدالة f قابلة الاشتقاق على $[0;+\infty[$ و $f'(t) = \frac{113,85e^{-1,15t}}{\left(99e^{-1,15t} + 1\right)^2}$

مهما كان t من $[0;+\infty[$: $f'(t)>0$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=1$ لأن $\begin{cases} -1,15t \to -\infty \\ e^{-1,15t} \to 0 \end{cases}$

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
f	$0,01$	$\nearrow$	1

(d $f(t)=0,99$ معناه $\dfrac{1}{99e^{-1,15t}+1}=0,99$

أي $99e^{-1,15t}+1=\dfrac{100}{99}$

أي $e^{-1,15t}=\dfrac{1}{99^2}$

أي $-1,15t=\ln\dfrac{1}{99^2}$

و بالتالي $t=\dfrac{2}{1,15}\ln 99\approx 7,99$

نسبة السكان الذين سمعوا الخبر تلحق $99\ \%$ على الساعة 16 بالتقريب .

تمرين 2 :

لتكن الدالة f المعرفة على ، بـ : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases} -x \to +\infty \\ e^{-x} \to +\infty \\ 1+e^{-x} \to +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن $\begin{cases} -x\to-\infty \\ e^{-x}\to 0 \\ 1+e^{-x}\to 1 \end{cases}$

f قابلة الاشتقاق على ، و : $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

مهما كان x من ، : $e^{-x}>0$ و منه $f'(x)<0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

2° مهما كان x من ، : $f(x)+x=\ln(e^{-x}+1)+x$

$$=\ln\left(e^{-x}+1\right)+\ln\left(e^{x}\right)$$

$$=\ln e^{x}\left(e^{-x}+1\right)=\ln\left(1+e^{x}\right)$$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)$ لأن $\begin{cases} e^{x}\to 0 \\ 1+e^{x}\to 1 \end{cases}$

$=0$

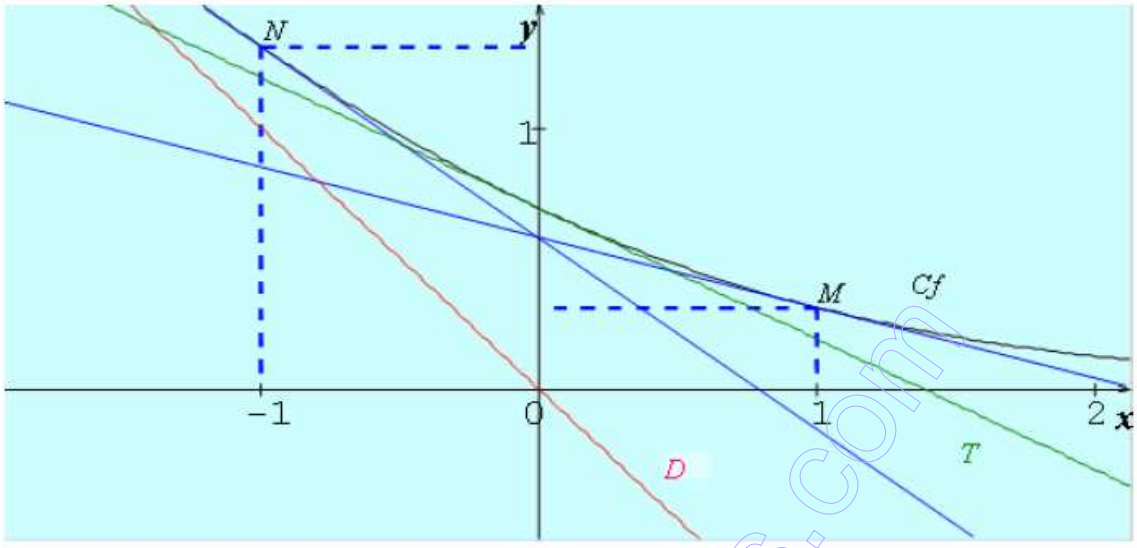
المستقيم D الذي معادلته $y=-x$ مستقيم مقارب لـ C_f بجوار $-\infty$.

مهما كان x من ، : $e^{x}>0$ ؛ $1+e^{x}>1$ و منه : $\ln\left(1+e^{x}\right)>0$

C_f يقع فوق D .

3° لدينا $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ و $f(0)=\ln 2$. معادلة المماس T هي إذن :

$y=-\frac{1}{2}x+\ln 2$.



4° a) x_0 عدد حقيقي غير معدوم .

$$f(x_0)-f(-x_0)=\ln\left(1+e^{-x_0}\right)-\ln\left(1+e^{x_0}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{1+e^{-x_0}}{1+e^{x_0}}\right)=\ln e^{-x_0}\left(\frac{e^{x_0}+1}{1+e^{x_0}}\right)$$
$$=\ln e^{-x_0}=-x_0$$

b) معامل توجيه المستقيم (MN) يساوي :

$$\frac{f(x_0)-f(-x_0)}{x_0-(-x_0)}=\frac{-x_0}{2x_0}=-\frac{1}{2}$$

نستنتج أن كل المستقيمات (MN) توازي المماس T .

c)
$$f'(x_0)+f'(-x_0)=-\frac{e^{-x_0}}{1+e^{-x_0}}-\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}$$
$$=-\frac{e^{-x_0}}{e^{-x_0}\left(e^{x_0}+1\right)}-\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}$$
$$=\frac{-1-e^{x_0}}{1+e^{x_0}}=-1$$

معادلتا المماسان لـــ C_f عند M و N هي على الترتيب :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \quad \text{و} \quad y=f'(-x_0)(x+x_0)+f(-x_0)$$

ترتيبتا نقطي تقاطعهما مع محور التراتيب هما :

$$-x_0f'(x_0)+f(x_0) \quad \text{و} \quad x_0f'(-x_0)+f(-x_0)$$

بما ان ، حسب ما سبق : $f(-x_0)=f(x_0)+x_0$ و $f'(-x_0)=-1-f'(x_0)$

فإن الترتيبتان متساويتان و منه المماسان لـــ C_f عند M و N يتقطعان على محور التراتيب .

تمرين 3:

1°\
$$d(O;M)=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}$$
$$=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2+(\ln x)^2}$$

2°\ $f:x\to\sqrt{x^2+(\ln x)^2}$ و $g:x\to x^2+(\ln x)^2$

f و g دالتان قابلتان الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و بما أن $f=\sqrt{g}$ فإن

$f'=\dfrac{g'}{2\sqrt{g}}$. $\sqrt{g}$ موجب تماما إذن f' و g' لهما نفس الإشارة و منه

f و g لهما نفس التغيرات .

3° \ $g'(x)=2x+(2\ln x)\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\frac{2\left(x^2+\ln x\right)}{x}$$

بما أن x ينتمي إلى $]0;+\infty[$ ، فإن $g'(x)$ له إشارة $x^2+\ln x$.

4° \ تغيرات $h:x\to x^2+\ln x$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases} x^2\to 0 \\ \ln x\to -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases} x^2\to +\infty \\ \ln x\to +\infty \end{cases}$

h قابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $h'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$.

مهما كان x من $]0;+\infty[$ ، $h'(x)>0$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5° \ h مستمرة على $[0,6;0,7]$ (لأن h قابلة الاشتقاق) .

h متزايدة تماما على $[0,6;0,7]$.

$h(0,6).h(0,7)<0$ ؛ $h(0,7)\approx 0,13$ ؛ $h(0,6)\approx -0,15$

المعادلة $h(x)=0$ تقبل إذن حلا وحيدا α ينتمي إلى $]0,6;0,7[$.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن $g'(x)$ و $h(x)$ لهما نفس الإشارة ، فإن لدينا :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

الدالة g تقبل إذن قيمة حدية صغرى وحيدة عند α .

6° \ f و g لهما نفس التغيرات . الدالة f تقبل إذن قيمة حدية صغرى وحيدة عند α و هي : $f(\alpha)=\sqrt{\alpha^2+(\ln\alpha)^2}$. نعلم أن $h(\alpha)=0$ أي $\alpha^2+\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha^2$. و منه :

$f(\alpha)=\sqrt{\alpha^2+(-\alpha^2)^2}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

حصر $f(\alpha)$: $0,6<\alpha<0,7$ منه $0,36<\alpha^2<0,49$

أي $1,36<1+\alpha^2<1,49$

أي $1,16<\sqrt{1+\alpha^2}<1,22$

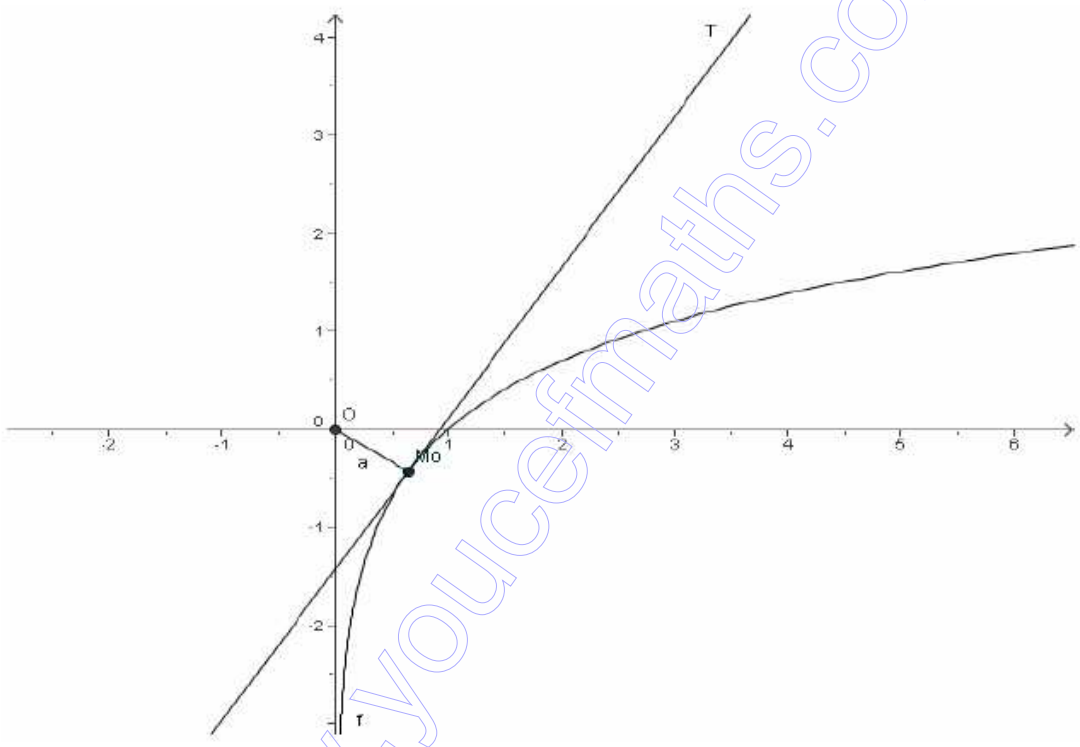
و بالتالي $0,69<\alpha\sqrt{1+\alpha^2}<0,85$

7° \ معامل توجيه المستقيم (OM_0) هو :

$$\frac{y_{M_0}-y_O}{x_{M_0}-x_O}=\frac{\ln\alpha}{\alpha}=\frac{-\alpha^2}{\alpha}=-\alpha$$

معامل توجيه المماس لـ (C) عند النقطة M_0 هو $\frac{1}{\alpha}$ (لأن $(\ln x)'=\frac{1}{x}$)

جداءهما يساوي $\left(\frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha)=-1$. هاذين المستقيمين متعامدين .



www.youcefmaths.com